

Řešte následující rovnici a proveďte
analýzu řešení procházejících zadaným

bodem $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$y'(x) = x \sqrt[3]{y(x)^2}$$

1. krok: Označme $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $h(x) = x$,

$I = D_h = (0, \infty)$. Budeme hledat řešení

definovaná na nějakém intervalu $\tilde{I} \subseteq I (= \mathbb{R})$

2. Funkce g splňuje $g(x) = 0$ právě pro $x = 0$. Dostráváme tak stacionární

řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Toto řešení je maximální.

3. Maximálními intervaly, kde je funkce g spojitá a nenulová jsou $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.

Budeme tedy hledat řešení která mají hodnoty vždy právě v jednom z těchto intervalů.

4) Tato řešení splňují

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)^2}} = x$$

Je lihoz $\int x^{-\frac{2}{3}} dx \stackrel{c}{=} 3\sqrt[3]{x}$ a $\int x dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2},$

dostáváme vztah

$$(*) \quad \sqrt[3]{f(x)} = \frac{x^2}{2} + c,$$

kte c je nějaká, a priori libovolná konstanta.

5. Zobrazení $G(x) = \sqrt[3]{x}$ splňuje

$$G(J_1) = (-\infty, 0), \quad G(J_2) = (0, \infty).$$

Oba případy vyše máme zvlášť.

5.1. g má hodnoty v J_1 . Pak $G_0 g$ má hodnoty v $(-\alpha, 0)$ a tedy x musí splňovat $\frac{x^2}{2} + C < 0$, i.e. $x^2 < -2C$.

Tedy pro $C \geq 0$ žádné takové řešení není,
pro $C < 0$ dostáváme podmínku $x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C})$.

Úpravou (*) dostáváme nyní řešení

$$g_{1,c}(x) = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3, \quad x \in \left(-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c} \right) \text{ pro } c < 0.$$

S.2. g má hodnoty v J_2 . Pak $G \circ g$ má hodnoty v $(0, \infty)$ a tedy x musí splňovat

$$\frac{x^2}{2} + c > 0, \quad \text{i.e.} \quad x^2 > -2c.$$

Tedy pro $c > 0$ je podmínka splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro $c \leq 0$ dostáváme

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \cup (\sqrt{-2c}, \infty).$$

Úpravou (*) dostaneme následující tři typy

řešení:

$$\bullet g_{2,c}(x) = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } c > 0$$

$$\bullet g_{3,c}(x) = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \quad \text{pro } c \leq 0$$

$$\bullet g_{4,c}(x) = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3, \quad x \in (\sqrt{-2c}, \infty) \quad \text{pro } c \leq 0.$$

6. Spočítáme nejprve limity řešení $y_{1,c}$, $y_{2,c}$ a $y_{4,c}$
(tedy těch, která jsou definována na
vlastní podmnožině $\mathbb{R}$) v krajních bodech
jejich definičních oborů:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2c}^+} y_{1,c}(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2c}^-} y_{1,c}(x) = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2c}^-} \gamma_{3,c}(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2c}^+} \gamma_{4,c}(x) = 0$

Všechna tato řešení lze tedy lepit

se stacionárním řešením $\gamma(x) = 0$. Jelikož
jsou jednotlivá řešení definována na

potenciálně disjunktních množinách, je možné je různě kombinovat.

Dobré příklady dostáváme následující max. řešení:

- $f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \left(\frac{x^2}{c} + \frac{c}{3}\right)^3, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } c > 0$

$$\bullet \gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad \text{pro } c \leq 0$$

$$\bullet \gamma(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad \text{pro } c \leq 0$$

$$* \eta(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3}\right)^3 & , x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}) \\ 0 & , x \in [\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad \text{pro } c < 0$$

$$* \eta(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c_1}{3}\right)^3 & , x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}) \\ 0 & , x \in [-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c_2}{3}\right)^3 & , x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty) \end{cases} \quad \text{pro } c_1, c_2 \leq 0$$

$$\delta \gamma(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c_1}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}) \\ 0, & x \in \underbrace{\left[-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}\right]}_{(\Delta)} \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c_2}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}) \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \infty) \end{cases}$$

pro $c_1 \leq c_2 < 0$

Tato podmínka zajistí, že (Δ) je nepřázdny interval
a že funkce je dobře definovaná.

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C_2}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{C_2}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C_2}, \sqrt{-2C_2}) \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C_2}, \sqrt{-2C_3}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{C_3}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2C_3}, \infty) \end{cases}$$

pro $C_3 \leq C_2 < 0$

že stejného důvodu jako výše.

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{C_1}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C_1}) \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C_1}, -\sqrt{-2C_2}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{C_2}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C_2}, \sqrt{-2C_2}) \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C_2}, \sqrt{-2C_3}] \\ \left(\frac{x^2}{6} + \frac{C_3}{3}\right)^3, & x \in [\sqrt{-2C_3}, \infty) \end{cases}$$

Pro $C_1, C_2, C_3 \leq 0$ kde

$$C_1 \leq C_2 < 0 \quad \text{a} \quad C_3 \leq C_2 < 0.$$

Že nelze ležet jiným trii sobem se dokáže následovně:

Řešení typu δ_1, C nelze ležet s ostatními jistě
než v krajních bodech neboť jsou záporná
a ostatní jsou nezáporná.

Řešení $\gamma_{3,c}$ může ležet s řešením
 $\gamma_{4,c}$ neboť jejich definiční obory jsou
vždy disjunktivní. Všimnout je případ kdy
obě konstanty jsou 0, kterým jsme ale podružili.

Řešení γ_{i,c_1} může slézt s γ_{i,c_2} ,
 $c_1 \neq c_2$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ proto, že pro každé
 x platí $\gamma_{i,c_1}(x) = \gamma_{i,c_2}(x)$. (0)

To se nachlédne z předpisu $\left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3}\right)^3$.

$x \mapsto x^2$ je prostá fce a $\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3}$ je parabola

$\frac{x^2}{6}$ posunutá o $\frac{c}{3}$ ve směru osy y .

Dvě takovéto paraboly posunuté každá o jinou
konstantu se nikdy neprotínou a tedy
(0) existují pro každé x .

Stejný argument dává, že lze prodloužit
řeší typy $\delta_{2/c}$ [✓] $\delta_{1/c}$ řešením ostatních
typů.

7. Provedeme nyní analýzu odůvodňující
důležitý bod procházející jistou řadou

7.1 Body (x_0, y_0) , $y_0 = 0$ nekonečně mnoho řešení.

Speciálně jedno konstantní a nekonečně
mnoho monotónních (ta jsou nulová buď
na $(-\infty, x_0]$ nebo $[x_0, \infty)$, podle typu monotonie)

Všechna řešení mají limity u $\pm\infty$ a to

bud' 0 nebo $+\infty$.

7.2. Necht' $x_0 < 0$. Pak řešení proch' zející bodem

(x_0, y_0) musí, být u okolí tohoto bodu typu

$x_{11}C$, $C < 0$ neboť ostatní řešení jsou
mezi sebou.

Tedy musí platit

$$r_0 = \left(\frac{x_0^3}{6} + \frac{c}{3} \right)^3,$$

po úpravách

$$C = 3r_0^3 - \frac{x_0^9}{2}.$$

Jelikož $r_0 < 0$, je i $C < 0$. Zbyvá ověřit,

$$\text{že } x_0 \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}).$$

Platí $\sqrt{-2c} = \sqrt{x_0^2 - \frac{3}{2}x_0^3} > \sqrt{x_0^2} = |x_0|$. $x_0 < 0$

Tedy i tato podmínka je splněna.

Bodem $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tedy prochází nekonečné množiny řešení, všechna splňují

$$y(x) = \left(\frac{x_0^2}{6} + \frac{c}{3}\right)^3, \quad x \in \left(-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\right)$$

kde c je spočteno výše.

Speciálně zřejmě řešení není monotónní
a všechny mají limity v $\pm\infty$, a to
buď 0 nebo $+\infty$.

7.3. Necht' $x_0 > 0$. Pak řešení procházející bodem
 (x_0) má asi, byť a x_0 typu $\gamma_{i,c}$ kde
buď $i=2$ a $c > 0$ nebo $i \in \{3,4\}$ a $c \leq 0$.

Musi tedy platit

$$\gamma_0 = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3$$

to je

$$c = 3 \sqrt[3]{\gamma} - \frac{x^2}{2}$$

Rozlišíme dva případy :

7.3.1 je-li $3\sqrt[3]{y_0} > \frac{x_0^2}{2}$ pak $c > 0$

a bude $m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ proclíží graf $\bar{v}$ je dvo
řešení a to

$$y = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

kde c je spočítáno výše. Toto řešení
je monotónní a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

$$7.3.2. \quad \text{Je-li;} \quad 3\sqrt[3]{x_0} \leq \frac{x_0^2}{2} \quad \text{pro } C \leq 0$$

a je třeba ověřit, že

$$x_0 \in (-\infty, -\sqrt{-2C}) \cup (\sqrt{-2C}, \infty).$$

$$\text{Jelikož } \sqrt{-2C} = \sqrt{x_0^2 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x_0}} < \sqrt{x_0^2} = |x_0|$$

$x_0 > 0$

je tato podmínka splněna.

Podm (x_0) tedy proclí zí nekonečné mnoho řešení, všechna splňjí, v závislosti na $\text{sgn}(x_0)$,

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{c}{3} \right)^3 \quad \text{budi pro}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \quad (\text{pro } \text{sgn}(x_0) = -1)$$

$$\text{nebo pro } x \in (\sqrt{-2c}, \infty) \quad (\text{pro } \text{sgn}(x_0) = 1).$$

Přívě jednu z těchto řešení je monotónní,

pro všechna $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{x \rightarrow \operatorname{sgn}(x_0)\infty} y(x) = \infty$.